

Vergleich von Anlagestrategien bei Riesterrenten ohne Berücksichtigung von Gebühren Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen*

Andreas Weber und Uwe Wystup

MathFinance AG

andreas.weber@mathfinance.com

uwe.wystup@mathfinance.com

<http://www.mathfinance.com>

19. September 2009



Überblick

Bei der Altersvorsorge von Privatanlegern boomt in der derzeitigen Marktsituation die Vermarktung von Riesterverträgen. Verschiedene Anbieter versuchen, sich diesen Markt zu erschließen. Neben den Versicherungen haben auch Banken und Investmentgesellschaften Angebote auf den Markt gebracht. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir vier repräsentative Anlagekonzepte bei Riester-Rentenverträgen unter Auslassung der Gebührenstrukturen: DWS Riesterrente Premium, AXA TwinStar Rente Invest, Nürnberger Fondsgebundene Zulagen-Rente Doppel-Invest und Allianz Riesterrente mit Fonds und Garantie. Wir simulieren über einen Anlagehorizont von 35 Jahren die Verteilungen des bei Renteneintritt zur Verfügung stehenden Kapitals. Den Verlauf eines internationalen Aktienportfolios simulieren wir mit einer Displaced-Double-Exponential Sprungdiffusion. Dabei werden optimistische, pessimistische und gemischte Szenarien betrachtet. Im Ergebnis zeigt sich, dass der CPPI-Ansatz der DWS in nahezu allen Fällen anderen Strategien überlegen ist.

*Wir danken Herrn Baki Irmak und Frank Breiting, Alberto del Pozo, Ferdinand Haas, Matthias Reimer, Reiner Martin von DWS für den Auftrag und die Anregungen für diese Studie.

Schlagworte: Altersvorsorge, Garantiefonds, Asset-Melt-down, Sparpläne, CPPI, Dynamic Hedging

JEL-Klassifizierung: C15, G112



Andreas Weber ist seit 2006 als Senior Financial Engineer bei der MathFinance AG zuständig für die Entwicklung und Implementierung von Bewertungsverfahren für Finanzderivate. Davor arbeitete er sechs Jahre als Quant bei der Commerzbank AG, zuletzt als Senior verantwortlich für den Bereich Devisenoptionen. Seine Expertise liegt in der Modellierung, Entwicklung und Implementierung von Berechnungsverfahren für Devisenoptionen und -zertifikate, der Erweiterung von Handelssystemen mit exotischen Optionen. Andreas Weber studierte Theologie, Mathematik und Physik, abgeschlossen mit dem Diplom in Mathematik mit Schwerpunkt Stochastik an der Goethe Universität Frankfurt am Main.



Uwe Wystup ist Vorstand der [MathFinance AG](#), eines Teams von Quants mit Expertise in Devisenoptionen und strukturierten Produkten. Zuvor war er Financial Engineer und Strukturierer im Devisenoptionshandel, unter anderem bei Sal. Oppenheim und der Commerzbank. Zugleich ist Uwe Wystup Professor für Quantitative Finance an der [Frankfurt School of Finance & Management](#). Er ist Editor des [MathFinance Newsletters](#) und der *Annals of Finance*. Uwe Wystup erhielt den Doktorgrad in *Mathematical Finance* von der [Carnegie Mellon University](#). Neben zahlreichen Artikeln in Fachzeitschriften publizierte er die zwei Bücher [Foreign Exchange Risk](#) und [FX Options and Structured Products](#).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Allgemeine Voraussetzungen	4
1.2	Staatliche Zulagen	4
2	Produkte	4
2.1	DWS Riester Rente Premium (DWS)	4
2.2	AXA TwinStar Rente Invest (AXA)	5
2.3	Nürnberger Fondsgebundene Zulagen-Rente Doppel-Invest (NUE)	5
2.4	Allianz RiesterRente mit Fonds und Garantie (ALL)	6
3	Simulationsmodell	6
3.1	Zinsstruktur	6
3.2	Displaced Double-Exponential Jump-Diffusion-Model	6
3.2.1	Modellgleichung	7
3.2.2	Relative Sprunghöhen	8
3.2.3	Driftbereinigung	9
3.2.4	Momente, Varianz und Volatilität	9
3.3	Schätzung der Parameter aus Finanzzeitreihen	10

4	Simulationsergebnisse	11
4.1	Erläuterungen zu den Aktienquoten	12
4.2	Standardszenario	13
4.3	Optimistisches Szenario	15
4.4	Pessimistisches Szenario	17
4.5	Crashszenario	19
4.6	Bullishes Szenario	21
4.7	Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch	23
4.8	Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch	25
5	Zusammenfassung	26

Abbildungsverzeichnis

1	DDE-Sprungprozess: simulierte Pfade	8
2	DDE Dichte	9
3	Box Plot Standard Szenario	13
4	Histogramme Standard Szenario	14
5	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im Standard Szenario	14
6	Box Plot Optimistisches Szenario	15
7	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im optimistischen Szenario	16
8	Box Plot Pessimistisches Szenario	17
9	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im pessimistischen Szenario	18
10	Box Plot Crash Szenario	19
11	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im Crash-Szenario	20
12	Box Plot Bullishes Szenario	21
13	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im bullishes Szenario	22
14	Box Plot Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch	23
15	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im geteilten Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch	24
16	Box Plot Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch	25
17	Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten im geteilten Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch	26

Tabellenverzeichnis

1	Geschätzte Parameter für den DDE-Prozess	11
2	Wahl der Modellparameter nach Szenarien	12
3	Ergebnisse Standard Szenario	13
4	Ergebnisse Optimistisches Szenario	15
5	Ergebnisse Pessimistisches Szenario	17
6	Ergebnisse Crashszenario	19
7	Ergebnisse Bullishes Szenario	21
8	Ergebnisse Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch	23
9	Ergebnisse Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch	25

1 Einleitung

In der vorliegenden quantitativen Studie untersuchen wir in einem Simulationsansatz die Verteilung des zum Renteneintritt zur Verfügung stehenden Kapitals für verschiedene Marktszenarien und stellvertretend für vier verschiedene Anlagestrategien. Ziel ist die Identifikation des bestmöglichen Anlagekonzeptes bei gleicher Gebührenstruktur. Die zusätzlichen Auswirkungen von Gebühren auf den Anlageerfolg finden sich beispielsweise in Weber und Wystup [9]. Eine Untersuchung der Produkte hinsichtlich Garantien, Kapitalanlage, Leistungen, Beiträge, Flexibilität, Risikoschutz, Kosten, Risiken und Transparenz befindet sich in der gutachterlichen Stellungnahme zu ausgewählten Riesterprodukten von Ortman [8].

1.1 Allgemeine Voraussetzungen

Wir betrachten als Beispiel einen Kunden ohne Kinder.

- Anlagehorizont: 35 Jahre
- Startalter: 30
- Renteneintritt: 65
- Einzahlung monatlich: 100 Euro
- Jahresgehalt: 30.000 Euro
- Beginn: 1.1.2008

Dies ist so gestaltet, dass der Anleger in den vollen Genuss der staatlichen Zulagen kommt.

1.2 Staatliche Zulagen

Per 1.1.2008 beträgt laut Altersvermögensgesetz (AVmG) die Zulage bei Riesterrenten 154 Euro pro Jahr plus 185 Euro für jedes Kind pro Jahr. Diese werden so verrechnet, dass die einzuzahlenden Beiträge sich um die Zulage reduzieren. Wir gehen davon aus, dass die Zulagen immer im Mai des Folgejahres auf das Konto des Anlegers eingezahlt werden. Einzige Ausnahme bildet das Jahr nach Renteneintritt. Hier schreiben wir dem Vertrag die Zulagen schon im Januar gut.

2 Produkte

Wir beschreiben nun die Anlagestrategien der vier Produkte. In allen Modellen nehmen wir eine Management Fee von 1,5% an und gehen von keinen weiteren Abschluss-, Verwaltungs- und Stückkosten aus, die durch den Produktmantel anfallen. Lediglich die bei der AXA weiteren anfallenden Garantiegebühren werden berücksichtigt.

2.1 DWS Riester Rente Premium (DWS)

Die DWS wendet für jedes Kundenportfolio individuelles CPPI (siehe etwa [3] oder [10]) an. Der Floor ergibt sich aus der Zerobondkurve, die aus einem durationsoptimierten Portfolio aus Anleihen gebildet wird. Wir modellieren dies durch die Zerobondkurve.

Höchststandsicherung. Der Anleger hat das Recht ab Alter 55 bis zum Ende seines Vertrags, den bis dahin erreichten Höchststand seines Portfolios zu sichern. Die Ausübung dieser Option wird in unserer Simulation nicht berücksichtigt, da sie in aller Regel den erwarteten Auszahlungsbetrag verringert und es nicht klar ist, nach welcher Regel ein Anleger sein Zusatzrecht einsetzen würde.

2.2 AXA TwinStar Rente Invest (AXA)

Die Garantie wird durch sogenanntes *Dynamic Hedging* (siehe etwa [6]) erzielt, analog dem GMIB (Guaranteed Minimum Income Benefit) Konzept. Garantiert wird ein bestimmter monatlicher Rentenbetrag. Wir simulieren das bei Eintritt ins Rentenalter zur Verfügung stehende Kapital ohne Abzug der Auszahlungsgebühr.

Die garantierte monatliche Rente ist eine sogenannte *variable annuity*. Ihr Wert bei Rentenbeginn ist variabel, da der Barwert der annuitätischen Zahlung von der dann gültigen Zinsstrukturkurve abhängt. Zur Absicherung wäre eine Putoption auf diesen Barwert erforderlich mit Laufzeit 35 Jahren. Da eine solche Putoption im Markt nicht erhältlich ist, wird die Auszahlung der Option durch eine dynamische Handelsstrategie dupliziert. Dies bedeutet insbesondere einen Delta-Hedge mit Futures auf den jeweiligen Benchmarkindex und einen Rho-Hedge mit Zinsswaps. Residualrisiken wie etwa Basisrisiko, Crashrisiko, Betarisiko werden vom Gesamtunternehmen abgefangen. Der Wert der Putoption wird bei Vertragsabschluss mit einem Marktmodell mit stochastischer Index- und Zinsentwicklung mit stochastischer Volatilität ermittelt. Die Berechnung erfolgt durch eine Bewertungsbibliothek, welche AXA von *Milliman, Inc* (<http://www.milliman.com>) zur Verfügung gestellt bekommen hat.

Der Kunde kann in Dachfonds anlegen oder sich ein Portfolio aus Aktien- und einem Rentenfonds zusammenstellen. Umschichten ist einmal im Jahr kostenlos, neue Einlagen sind jeweils beliebig aufteilbar. Wir gehen von einer Anlage in einen internationalen Aktienfonds aus. Die genaue Anlagepolitik der AXA ist nicht vertraglich vereinbart und bleibt für den Privatanleger undurchschaubar.

Garantiekosten. Die Garantiekosten sind damit zum Einen extrem *modellabhängig* und zum Anderen erst bei Vertragsabschluss ermittelbar. Vertraglich bestätigt werden diese dem Kunden in seiner Versicherungspolice daher nicht. Die Kosten werden dem Kunden variabel in Rechnung gestellt und jährlich aus seinem Fondsvermögen entnommen. Unter der von uns betrachteten Marktlage ergäben sich Garantiekosten in Höhe von 0,75%. Das von uns verwendete Simulationsmodell geht von deterministischen Zinsen und einer deterministischen Volatilität aus. Zum Zwecke der Vergleichbarkeit arbeiten wir in dieser Studie mit um 0,27% reduzierten Garantiekosten, also 0,48% statt 0,75%, um dem Sachverhalt gerecht zu werden, dass die Anlagestrategien der anderen Anbieter auf konstanter Volatilität der Fondsrendite und deterministischen Zinsen beruhen. Diese Reduktion setzt sich zusammen aus einem Anteil von 0,21% wegen deterministischer Volatilität und weiteren 0,06% wegen deterministischer Zinsen. Dies wurde uns schriftlich bestätigt, ist aber in den Versicherungsbedingungen und der Police nicht beziffert. AXA nennt selbst je nach Produkt sogar teilweise höhere Kosten, siehe Interview [4].

Automatisches Ablaufmanagement. Es wird ein automatisches Ablaufmanagement für die letzten fünf Jahre vorgenommen mit dem Ziel, bei Renteneintritt mindestens 50% in Rentenfonds investiert zu sein. Die Umschichtung in den Rentenfonds erfolgt monatlich linear. In den uns vorliegenden Rahmenbedingungen und einer Beispielpolice ist dieses Ablaufmanagement obligatorisch. Allerdings teilt uns die AXA schriftlich mit, dass das Ablaufmanagement grundsätzlich für den Kunden optional ist. Dieses sei zwar derzeit noch nicht in allen Bedingungsversionen vollständig umgesetzt, allerdings würden sie den Kunden mit bedingungsgemäß obligatorischem Ablaufmanagement eine Abwahl des Ablaufmanagements ermöglichen. Wir gehen in unseren Berechnungen davon aus, dass kein Ablaufmanagement stattfindet.

2.3 Nürnberger Fondsgebundene Zulagen-Rente Doppel-Invest (NUE)

Es wird ein Floor mit dem aktuellen Rechnungszins von 2,25% berechnet. Da das aktuelle Zinsniveau höher liegt, werden die Überschussanteile dem Vertrag einmal im Jahr gutgeschrieben. Dieser zu garantie-

rende Floor wird durch die Garantiezusage des Garantiefonds *ComInvest Garant Dynamic* gewährleistet. Dieser garantiert immer jährlich zum 31. Juli

$$\max(80\% \cdot S_{t_{n-1}}, 80\% \cdot \max[\text{tägliche Fixings}]), \quad (1)$$

wobei $S_{t_{n-1}}$ den Fondsstand des Vorjahres bezeichnet. Die ausgesprochene Garantie wird mit einem CPPI-Verfahren gewährleistet. Es wird soviel in den Garant Dynamic investiert, dass dessen Garantiezusage den Floor abdeckt. Das restliche Vermögen wird in den reinen Aktienfonds *Templeton Growth Fund* investiert. Eine Neuanpassung der Aufteilung auf die beiden Fonds erfolgt monatlich.

2.4 Allianz RiesterRente mit Fonds und Garantie (ALL)

Zunächst wird zur Sicherung des Kapitals in einen in der Versicherungsbranche üblichen Deckungsstock investiert. Es wird damit ein Floor gebildet, der mit aktuellem Rechnungszins von 2,25% berechnet wird. Da das aktuelle Zinsniveau höher liegt, werden die Überschussanteile dem Vertrag einmal im Jahr gutgeschrieben. Wir nehmen an, dass die Performance des Deckungsstocks der aktuellen Zinskurve entspricht. Nach Bilden des Floors wird das diesen übersteigende eingezahlte Kapital zu 100% in den internationalen Aktienfonds *dit Strategiefonds Wachstum Plus*, WKN 979727 ISIN DE0009797274, investiert.

3 Simulationsmodell

Um dem Zweck der Vergleichbarkeit von Anlagestrategien gerecht zu werden, erscheint es nicht sinnvoll, ganze – womöglich noch aktiv gesteuerte – Aktien- und Rentenportfolien zu erstellen und zu simulieren, weil zu viele Annahmen getroffen werden müssten. Auch das Risiko der Inflation und der steuerlichen Auswirkungen bleibt unberücksichtigt, da sie ein für alle Anlageformen gemeinsames Risiko darstellt. Stattdessen simulieren wir hier einen internationalen Aktien-Performance-Index über einen Zeithorizont von 35 Jahren. Wir halten es nicht für erforderlich, verschiedene weit diversifizierte Aktienindizes zu simulieren, da diese alle sehr ähnlich sind, siehe [1]. Wir verwenden stellvertretend den **MSCI Daily TR (Total Return) Gross (gross dividends reinvested) Index in USD**, in Bloomberg mit Kürzel „GDDUWI Index“.

3.1 Zinsstruktur

Für die Zinsstruktur verwenden wir die Euro-Kurve vom 15. September 2007. Diese Zinsstrukturkurve wird als unveränderlich angenommen und nicht simuliert. Als Garantiezins beziehungsweise Rechnungszins der Versicherungswirtschaft nehmen wir den aktuellen Satz von 2,25% an.

3.2 Displaced Double-Exponential Jump-Diffusion-Model

Für die Simulation des Indexes verwenden wir ein marktübliches Sprungdiffusionsmodell ähnlich denen von Merton [7] und Kou [5]. Wir gehen damit über das Black-Scholes-Modell [2] hinaus und erlauben somit ausdrücklich extreme Kursschwankungen nach oben und unten. Die relativen Sprunghöhen werden modelliert durch eine Displaced Double-Exponential (DDE)-Verteilung.

3.2.1 Modellgleichung

Wir simulieren gemäß

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{j=1}^{N_t} (V_j - 1) \right), \quad (2)$$

$$S_T = S_t \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \delta \right) \tau + \sigma W_{T-t} \right] \prod_{j=1}^{N_{T-t}} V_j, \quad (3)$$

wobei

(W_t) eine Standard-Brown'sche Bewegung,

(N_t) ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ ist und

V_j unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $V_j \sim e^Y$, wobei Y die relative Sprunghöhe modelliert, von deren Betrag wir annehmen, dass sie mindestens κ ist, und damit Y Werte in $(-\infty, -\kappa] \cup [\kappa, +\infty)$ annimmt.

Die Parameterbedeutungen sind

- μ erwartete stetige Zuwachsrate des zugrunde liegenden Total Return World Index,
- σ dessen Volatilität,
- λ dessen erwartete Anzahl von Sprüngen pro Jahr,
- δ die aus dem Sprunganteil resultierende Driftbereinigung, die so zu wählen ist, dass der Prozess S_t die gewünschte Drift μ hat.

Die Prozesse (W_t) , (N_t) , und Zufallsvariablen V_j seien alle voneinander unabhängig.

Die Pfade des Sprungprozesses sind rechtsstetig mit linken Limiten, und es kommen in endlichen Zeitintervallen nur endlich viele Sprünge vor. Das garantiert, dass das Produkt in [Gleichung \(3\)](#) nur endlich viele Faktoren hat. Wir zeigen fünf typische Kursverläufe in [Abbildung 1](#).

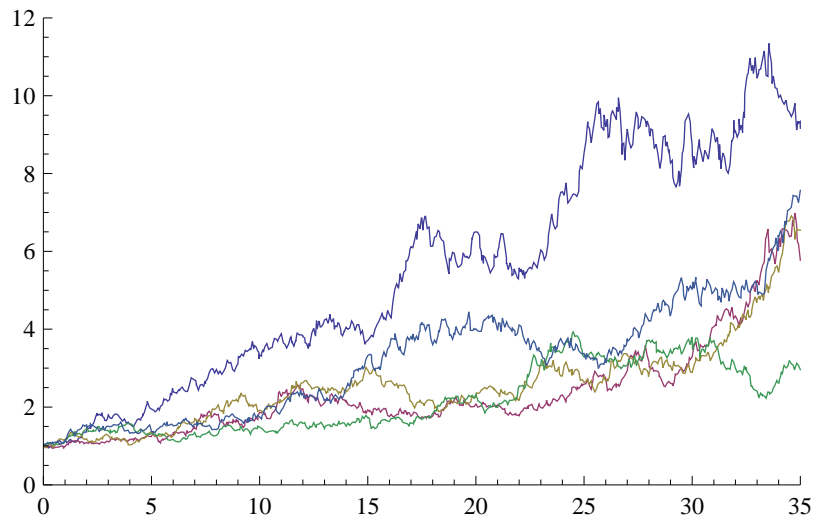


Abbildung 1: Displaced Double-Exponential Sprungprozess: simulierte Pfade. Die verwendeten Parameter sind $T = 35$ Jahre, $\mu = 6\%$, $\sigma = 12,8\%$, $\lambda = 5,193$, $\kappa = 2,019\%$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta = 1/0,827\%$, $p = 0,5$, $S_0 = 1$.

3.2.2 Relative Sprunghöhen

Verschiedene Ausprägungen von Sprungprozessen ergeben sich durch die Wahl von Y . Wir verwenden für Y unabhängige doppelt exponentiell verteilte Zufallsvariablen, die nur Werte außerhalb des Intervalls $(-\kappa, +\kappa)$ annehmen. Die Dichte ist

$$f_Y(y) = \begin{cases} p\eta_1 e^{-(y-\kappa)\eta_1} & \text{falls } y \geq \kappa, \\ 0 & \text{falls } |y| < \kappa, \\ (1-p)\eta_2 e^{(y+\kappa)\eta_2} & \text{falls } y \leq -\kappa, \end{cases} \quad (4)$$

wobei $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 0$ und $0 \leq p \leq 1$, dargestellt in [Abbildung 2](#).

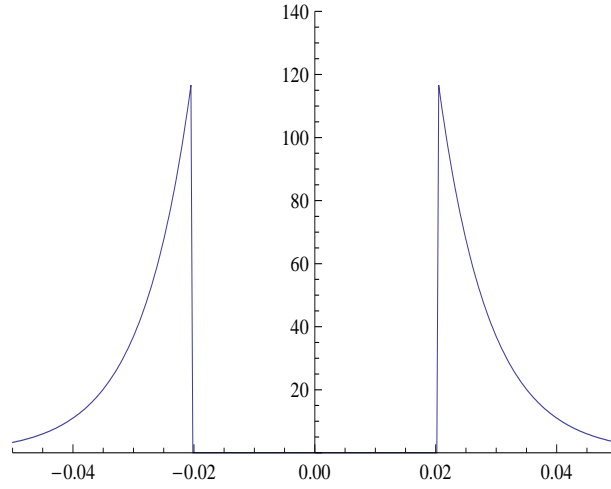


Abbildung 2: Displaced Double-Exponential Dichte von Y mit Parametern $\kappa = 2,019\%$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta = 1/0,827\%$, $p = 0,5$

Der Parameter κ bedeutet die minimale relative Sprunghöhe in beide Richtungen, $1/\eta$ den Erwartungswert der relativen Sprunghöhen über das Minimum hinaus, p die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung nach oben und $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung nach unten.

3.2.3 Driftbereinigung

Mit dieser Dichte ergibt sich analog zur Arbeit von Kou [5] die Driftbereinigung als

$$\begin{aligned} \delta &= \mathbb{E}[e^Y - 1] \\ &= \lambda \left(p\eta_1 \frac{e^{+\kappa}}{\eta_1 - 1} + (1 - p)\eta_2 \frac{e^{-\kappa}}{\eta_2 + 1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir stets $\eta = \eta_1 = \eta_2$ sowie $p = 0,5$.

3.2.4 Momente, Varianz und Volatilität

Die Varianz der Zufallsgröße $\ln \frac{S_t}{S_0}$ des DDE-Sprungprozesses (3) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{var} \left[\ln \frac{S_t}{S_0} \right] &= \sigma^2 t + \mathbf{var} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k (\kappa + H_k) \right] \\ &= \sigma^2 t + \lambda t ((\kappa + h)^2 + h^2). \end{aligned}$$

Damit beträgt die Volatilität des DDE-Prozesses

$$\sqrt{\frac{1}{t} \mathbf{var} \left[\ln \frac{S_t}{S_0} \right]} = \sqrt{\sigma^2 + \lambda ((\kappa + h)^2 + h^2)}. \quad (6)$$

Details: Die H_k sind unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen mit Erwartungswert $h = \frac{1}{\eta}$ (also Parameter η), U_k eine Zufallsvariable die die Werte $+1$ und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annimmt, N_t ein Poisson-Prozess mit Intensität λ . Wir berechnen die ersten beiden Momente

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k(\kappa + H_k) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n U_k(\kappa + H_k) \right] \cdot \mathbb{P}[N_t = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot 0 \cdot \mathbb{P}[N_t = n] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k(\kappa + H_k) \right]^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n U_k(\kappa + H_k) \right]^2 \cdot \mathbb{P}[N_t = n] \\ &= \lambda t((\kappa + h)^2 + h^2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Varianz

$$\begin{aligned} & \text{var} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k(\kappa + H_k) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k(\kappa + H_k) \right]^2 - \left(\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k(\kappa + H_k) \right] \right)^2 \\ &= \lambda t((\kappa + h)^2 + h^2). \end{aligned}$$

3.3 Schätzung der Parameter aus Finanzzeitreihen

Die Modellparameter schätzen wir basierend auf der historischen Zeitreihe **MSCI Daily TR (Total Return) Gross (gross dividends reinvested) in USD** vom 1. Januar 1980 bis 21. Oktober 2005. Wir bezeichnen diese Kurse mit x_0, x_1, \dots, x_N . Zunächst bilden wir die logarithmischen Renditen

$$r_i \triangleq \ln \frac{x_i}{x_{i-1}}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Die Schätzung für die mittlere Tages-Log-Rendite ist dann

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i. \quad (8)$$

Die Schätzung für die Gesamtvolatilität $\hat{\sigma}_{tot}$ erhalten wir aus

$$\hat{\sigma}_{tot}^2 = \frac{\#\text{Kurse pro Jahr}}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N r_i^2 - N\bar{r}^2 \right). \quad (9)$$

Für die Parameter des Sprunganteils ist festzulegen, was ein Sprung ist. Wir definieren hier zu vorgegebenem Niveau $u \in [0, 1]$ die $u\%$ kleinsten und $u\%$ größten Tages-Log-Renditen. Das Niveau u sollte so gewählt werden, dass die damit entstehenden Kursänderungen intuitiv als Sprung empfunden werden. Eine zu große Wahl von u qualifiziert auch kleine Bewegungen als Sprünge. Eine zu kleine Wahl von u kann dazu führen, dass es überhaupt keine Sprünge gibt. Was letzten Endes als Sprung empfunden wird, ist nicht eindeutig festlegbar. Damit ist die Wahl von u in jedem Falle willkürlich. Wir haben in der vorliegenden Arbeit $u = 1\%$ gesetzt, weil damit Änderungen im MSCI World ab ca. 2% Änderung pro Tag als Sprung gelten. Änderungen von weniger als 2% lassen sich auch aus dem reinen Diffusionsanteil mit genügend hoher Wahrscheinlichkeit erklären. Es zeigt sich bei dem von uns analysierten MSCI World Total Return Index, dass der kleinste Sprung nach oben und der kleinste Sprung nach unten nahezu gleich groß sind und die Absolutwerte der relativen Sprunghöhen für $u = 1\%$ im Durchschnitt 2,019% betragen. Diese minimale Sprunghöhe verwenden wir als Schätzung für κ . Die einparametrische Exponentialverteilung auf beiden Seiten wird so eingestellt, dass der Parameter η den Daten möglichst gut entspricht. Dabei ist sowohl der Mittelwert wie auch die Standardabweichung ein Schätzer von $h = 1/\eta$. Wir erhalten einen Mittelwert von 0,827%. Die Anzahl der dann beobachteten Sprünge (134) in Relation zur Anzahl der Beobachtungen (6733) ermöglicht dann eine Schätzung der erwarteten Sprunghäufigkeit. Annualisiert ergibt sich daraus eine Schätzung für $\lambda = 5,193$.

Die Schätzung für die Volatilität $\hat{\sigma}$ muss schließlich noch gemäß [Gleichung \(6\)](#) korrigiert werden, da die Volatilität $\hat{\sigma}_{tot}$ sich aus dem Diffusionsanteil σ und dem Sprunganteil zusammensetzt.

Wir fassen die geschätzten Parameter in [Tabelle 1](#) zusammen.

Parameter	Wert
Mittlere stetige Rendite p.a. $\bar{r} \cdot 262$	11,1%
Gesamtvolatilität $\hat{\sigma}_{tot}$	12,8%
Volatilität des Diffusionsanteils $\hat{\sigma}$	10,9%
Sprungintensität λ	5,193
Mindestsprunghöhe κ	2,019%
Erwartete Sprunghöhe über Mindesthöhe h	0,827%
Driftbereinigung δ	0,122%

Tabelle 1: Geschätzte Parameter für den DDE-Prozess. Der Wert für die mittlere stetige Rendite wird in der Simulation nicht benutzt, da die Varianz des Schätzers für die mittlere Rendite sehr hoch ist.

4 Simulationsergebnisse

Wir präsentieren nun die Ergebnisse der Simulationen in sieben verschiedenen Szenarien. Bei 100.000 Simulationen sind die angeführten empirischen Mittelwerte und Mediane auf dem 95% Niveau auf bis zu maximal 0,5% genau. Die Box Plots basieren auf 10.000 Simulationen. Wir fassen die Wahl der Parameter für verschiedene Szenarien in [Tabelle 2](#) zusammen. Die verschiedenen Szenarien unterscheiden sich im

Wesentlichen durch unterschiedliche Renditeannahmen, da sich bekanntlich aus historischen Zeitreihen geschätzte Renditen nicht als zuverlässige Vorhersage für die künftige Entwicklung eignen.

Szeanrio	Rendite μ	Volatilität σ_{tot}
Standard	6%	12,8%
Optimistisch	8%	12,8%
Pessimistisch	4%	12,8%
Crash	3%	15,0%
Bullish	9%	15,0%
20 Jahre pessimistisch, dann optimistisch		12,8%
20 Jahre optimistisch, dann pessimistisch		12,8%

Tabelle 2: Wahl der Modellparameter nach Szenarien. Die übrigen Modellparameter sind den Schätzungen aus [Tabelle 1](#) entnommen.

Schließlich geben wir für die vier Anbieter den zeitlichen Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten an, d.h. den Anteil des in das internationale Aktienportfolio investierten Kapitals ohne Berücksichtigung von Gebühren.

4.1 Erläuterungen zu den Aktienquoten

Die dargestellten Aktienquoten werden monatlich ermittelt als Durchschnitt über alle Verläufe. Diese sind für einzelne Pfade meist deutlich anders. Erst durch die Mittelung entstehen die dargestellten Verläufe. Die tabellarisch aufgeführten Aktienquoten sind dann noch über die Zeit arithmetisch gemittelt.

AXA. Vertragsgemäß ist beim AXA-Produkt die Aktienquote immer bei 100%.

NUE. Die hier erkennbaren Zacken entstehen durch die Investition in den Garant Dynamic Fonds, bei dem die Kapitalgarantie immer jährlich ausgesprochen wird. Je nach Performance kommt es hier jährlich im Schnitt zu einer größeren Umschichtung. Die dargestellte Quote setzt sich zusammen aus dem voll in den TGF investierten Anteil und dem Aktienanteil im Garant Dynamic Fonds.

DWS. Die Aktienquoten sind in allen Fällen relativ hoch im Vergleich zu den Produkten der Nürnberger und der Allianz.

ALL. Die Aktienquote ist hier vergleichsweise gering.

4.2 Standardszenario

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	138.504	117.854	97%
NUE	127.706	110.355	85%
AXA	125.921	107.691	100%
ALL	102.198	92.226	54%

Tabelle 3: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Standard Szenario, Rendite=6% nach Abzug von Managementgebühren, Volatilität=12,8%

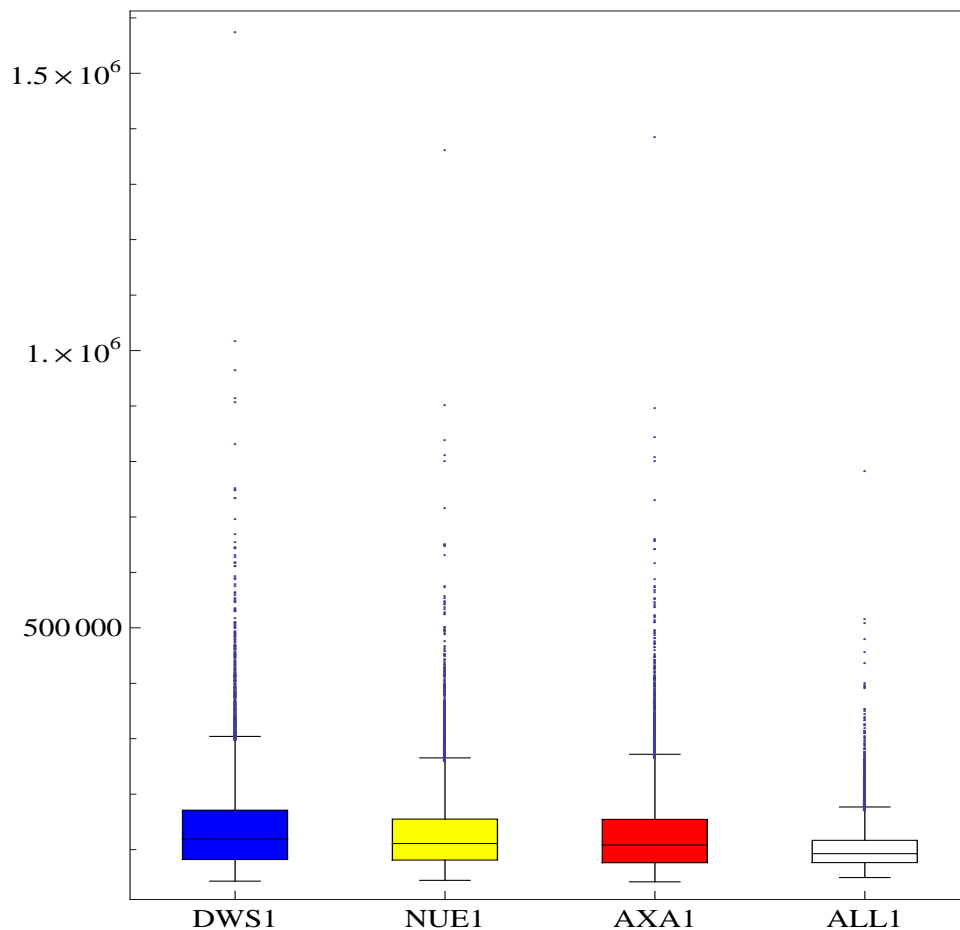


Abbildung 3: Box Plot Standard Szenario

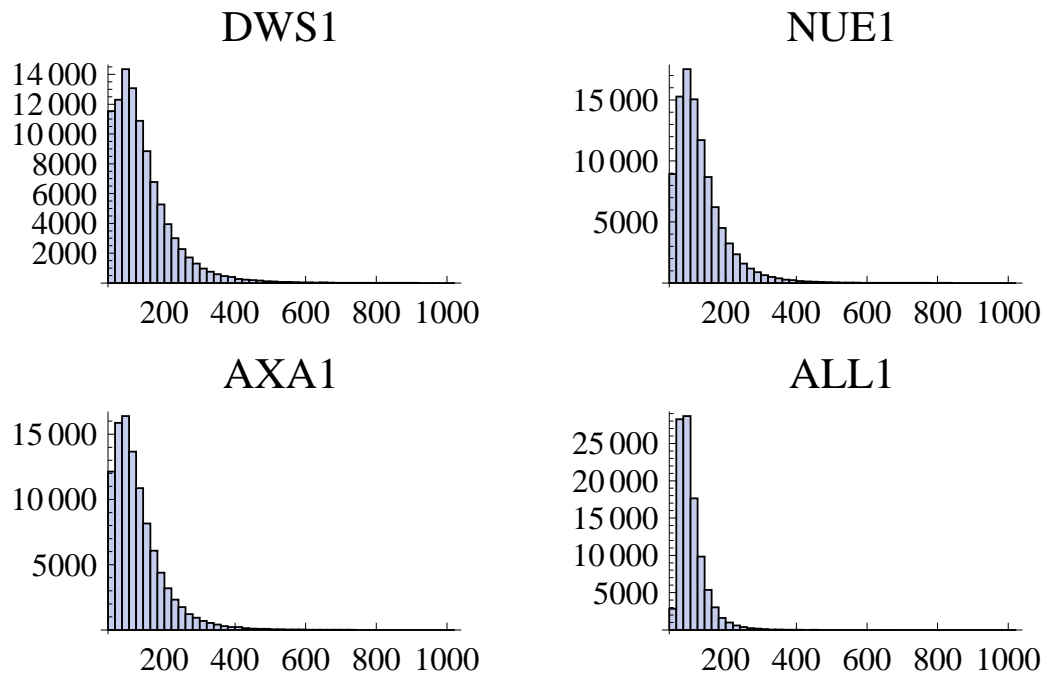


Abbildung 4: Absolute Häufigkeiten bei 100.000 Simulationen des bei Renteneintritt zur Verfügung stehenden Kapitals (in 1.000 Euro auf den x -Achsen), Standard Szenario

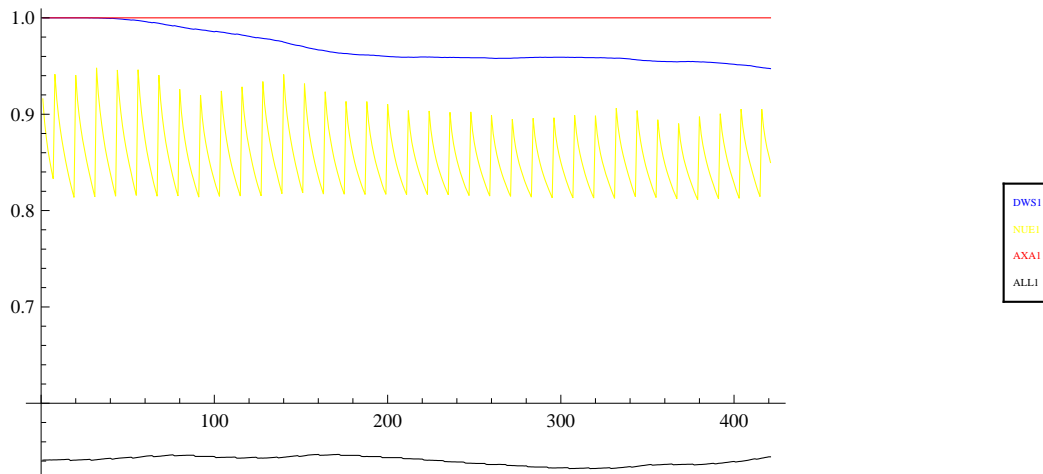


Abbildung 5: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Standard Szenario

4.3 Optimistisches Szenario

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	218.124	183.680	99%
NUE	194.312	164.731	88%
AXA	195.001	164.751	100%
ALL	139.792	122.692	59%

Tabelle 4: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Optimistisches Szenario, Rendite=8% nach Abzug von Managementgebühren, Volatilität=12,8%

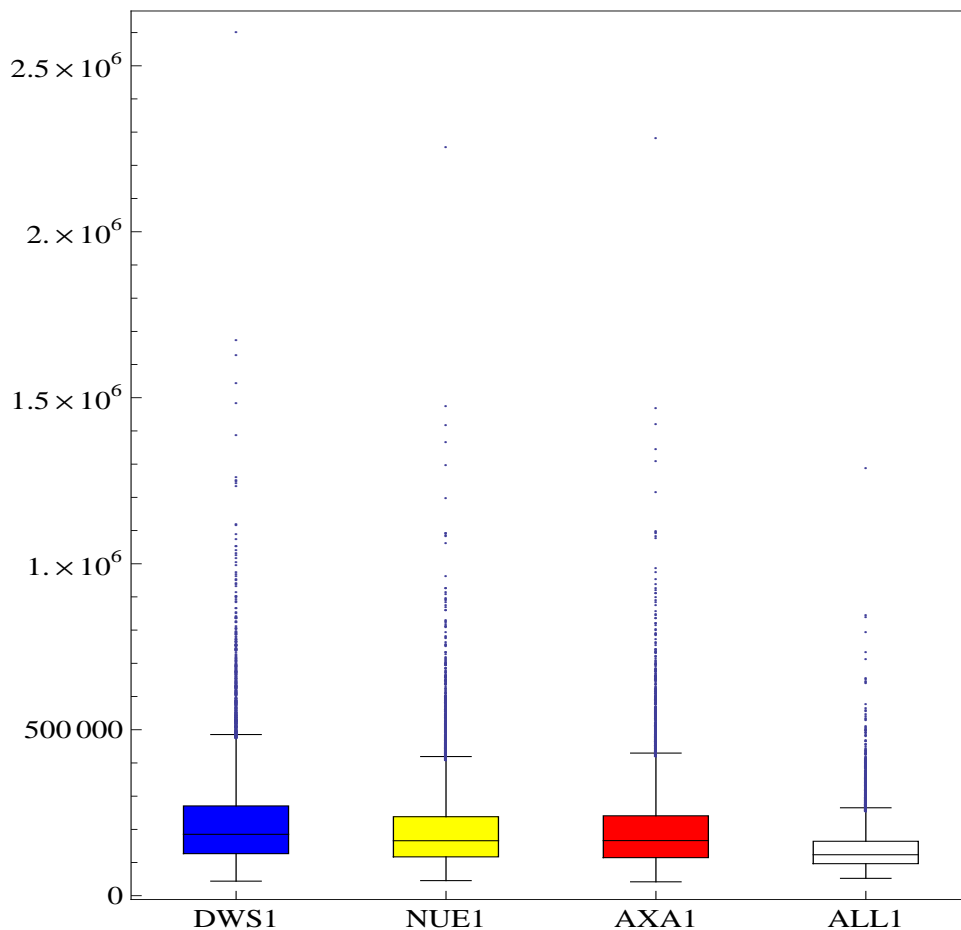


Abbildung 6: Box Plot Optimistisches Szenario

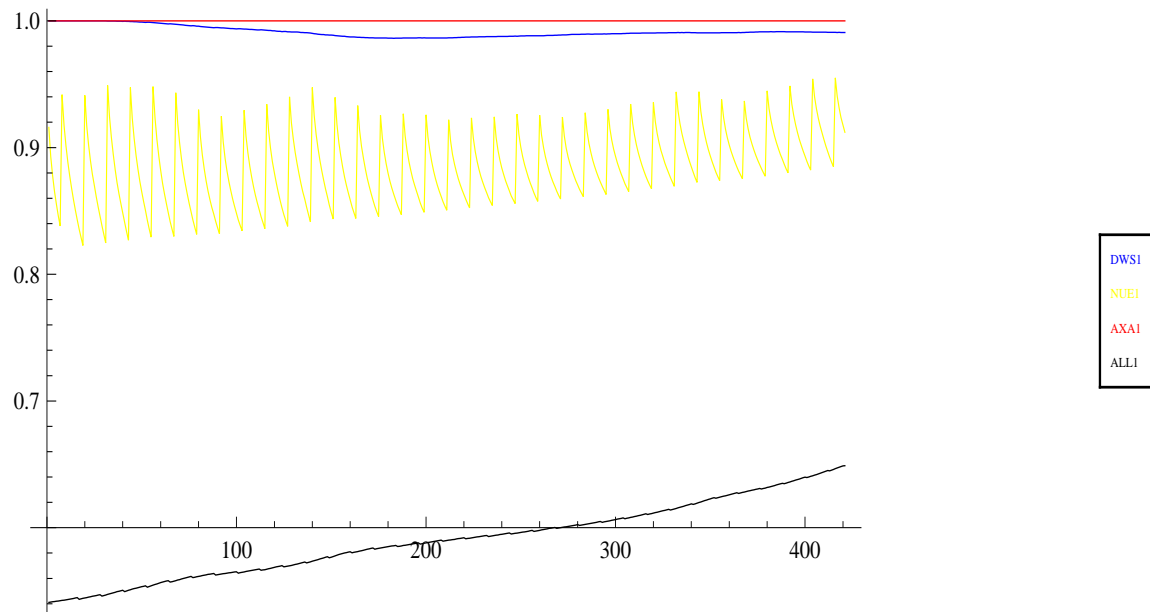


Abbildung 7: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Optimistisches Szenario

4.4 Pessimistisches Szenario

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	90.063	75.514	91%
NUE	87.214	76.399	80%
AXA	83.878	72.134	100%
ALL	79.622	73.803	49%

Tabelle 5: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Pessimistisches Szenario, Rendite=4% nach Abzug von Managementgebühren, Volatilität=12,8%

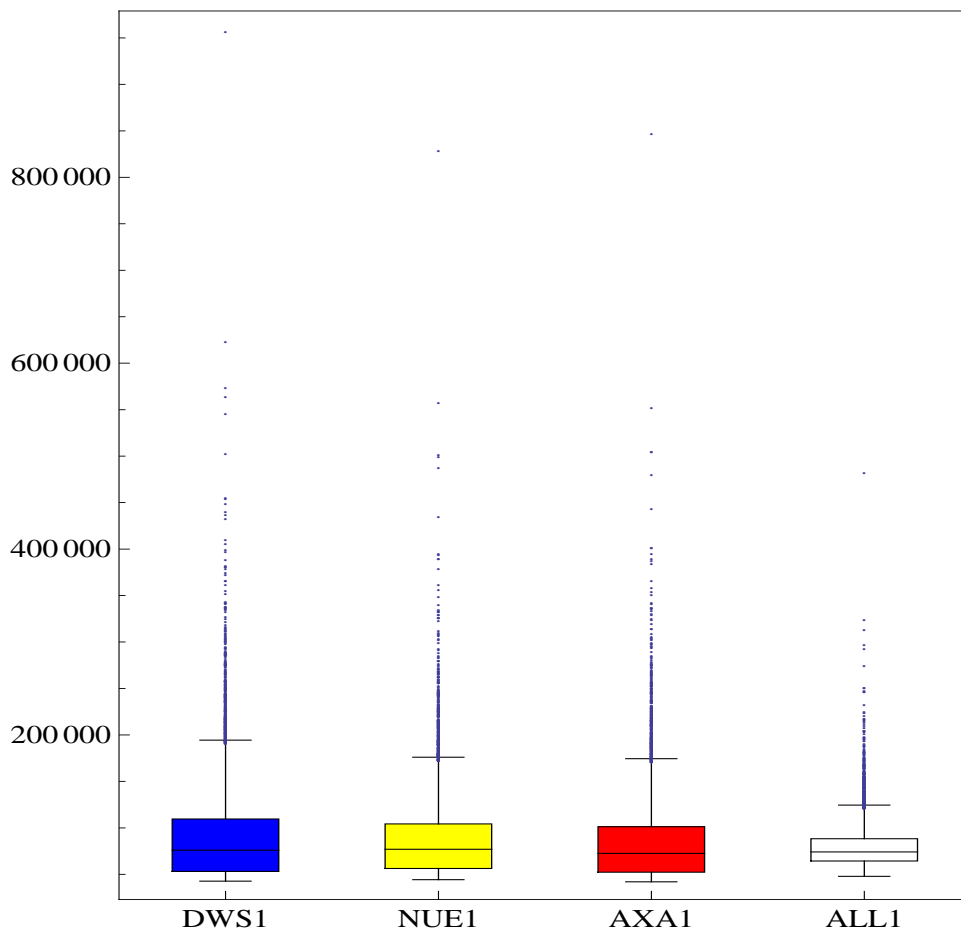


Abbildung 8: Box Plot Pessimistisches Szenario

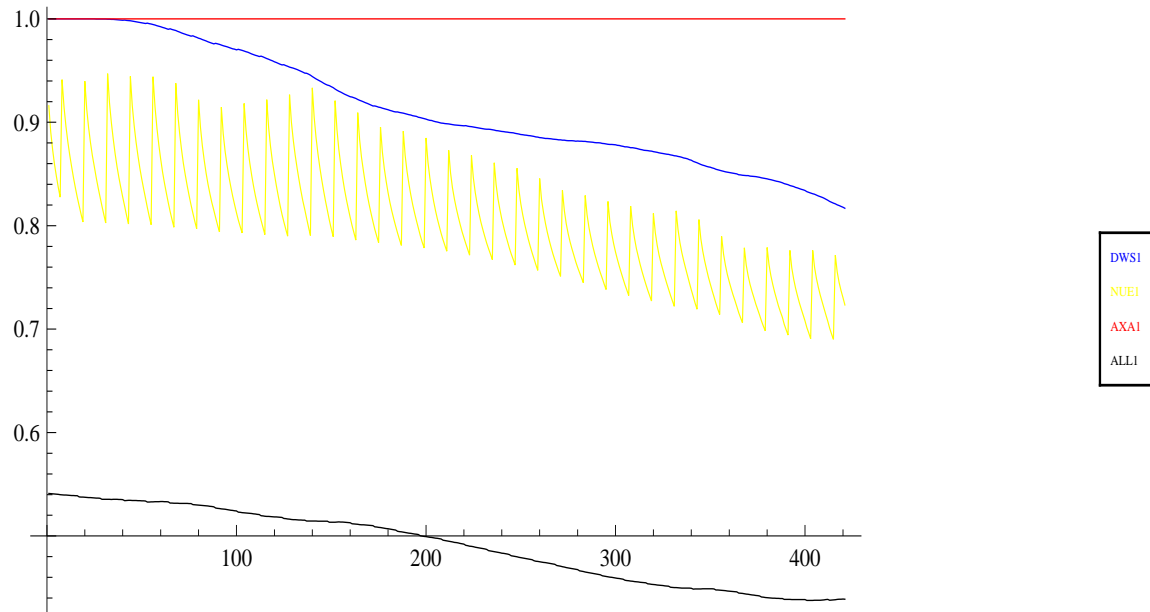


Abbildung 9: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Pessimistisches Szenario

4.5 Crashszenario

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	74.087	54.954	83%
NUE	73.516	59.395	73%
AXA	70.905	56.909	100%
ALL	71.957	66.071	46%

Tabelle 6: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Crashszenario, Rendite=3% nach Abzug von Managementgebühren, Volatilität=15,0%

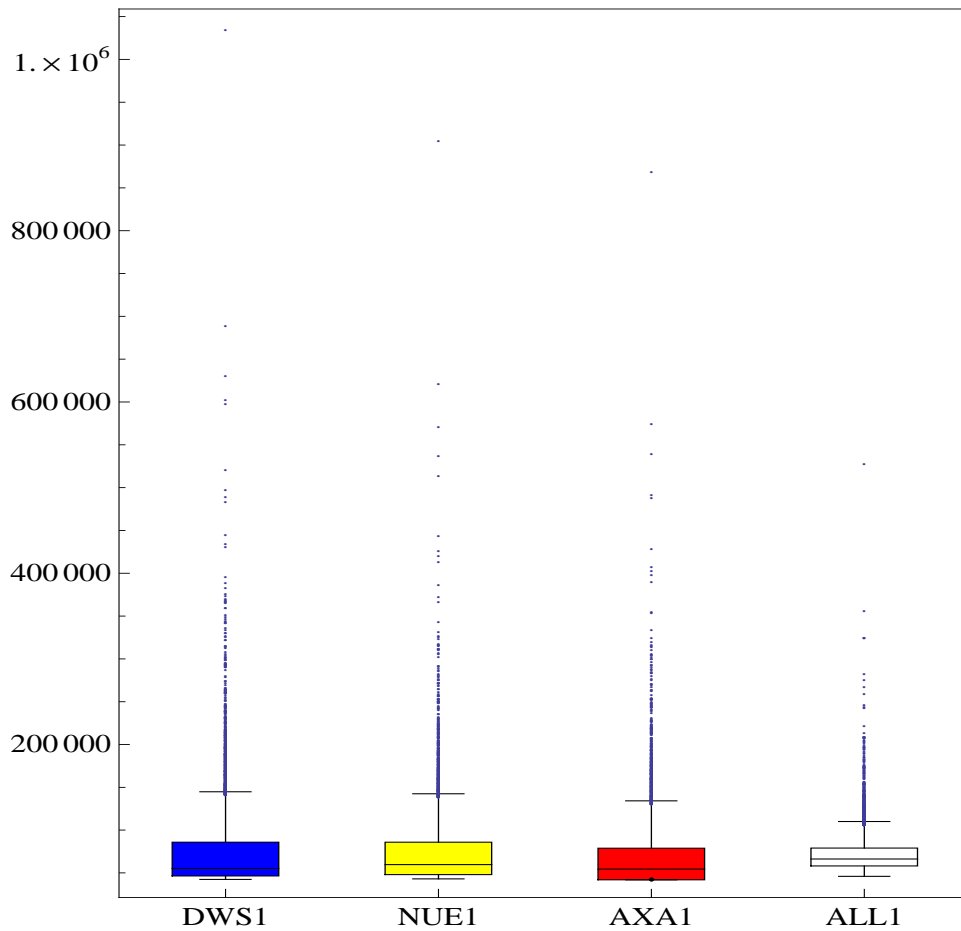


Abbildung 10: Box Plot Crash Szenario

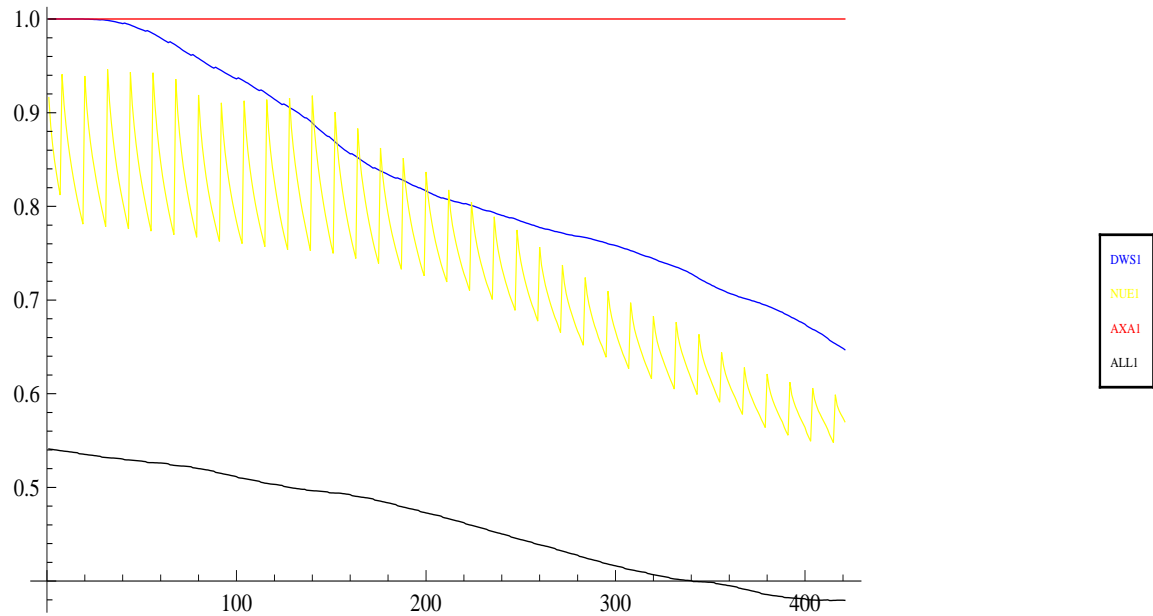


Abbildung 11: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Crash Szenario

4.6 Bullishes Szenario

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	273.495	214.347	99%
NUE	239.585	189.255	88%
AXA	244.416	192.521	100%
ALL	167.107	137.554	61%

Tabelle 7: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Bullishes Szenario, Rendite=9% nach Abzug von Managementgebühren, Volatilität=15,0%

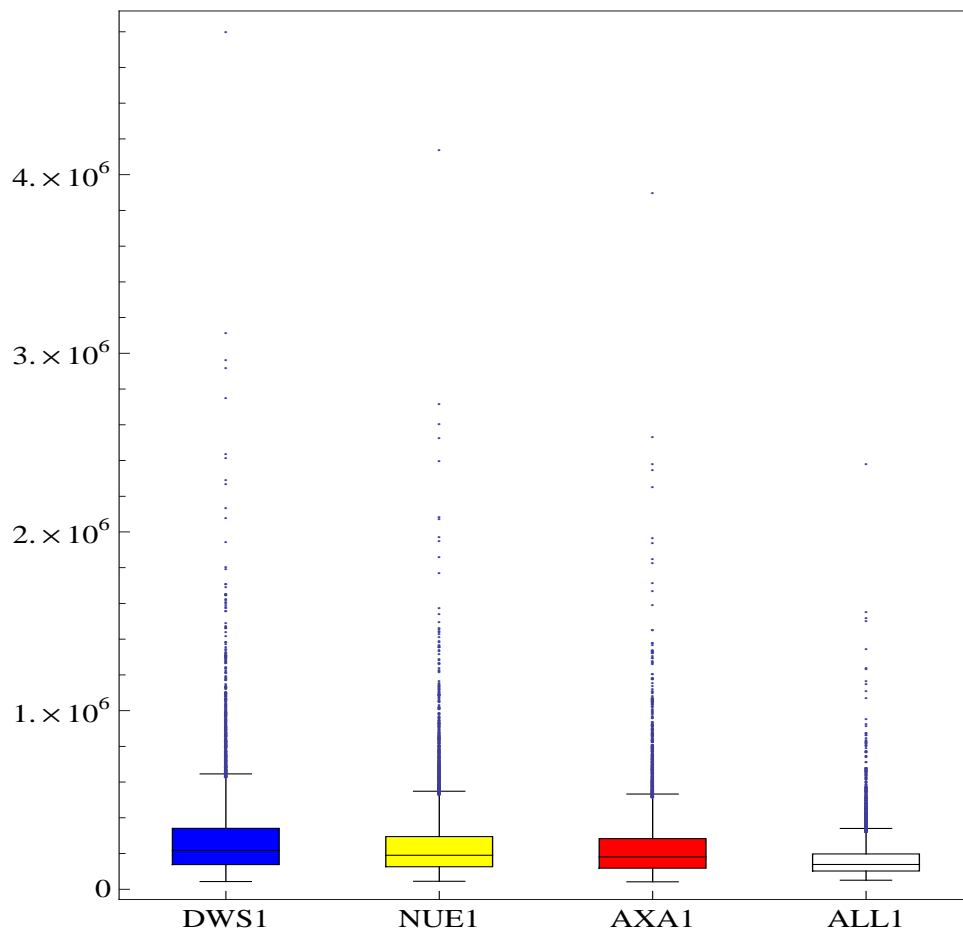


Abbildung 12: Box Plot Bullishes Szenario

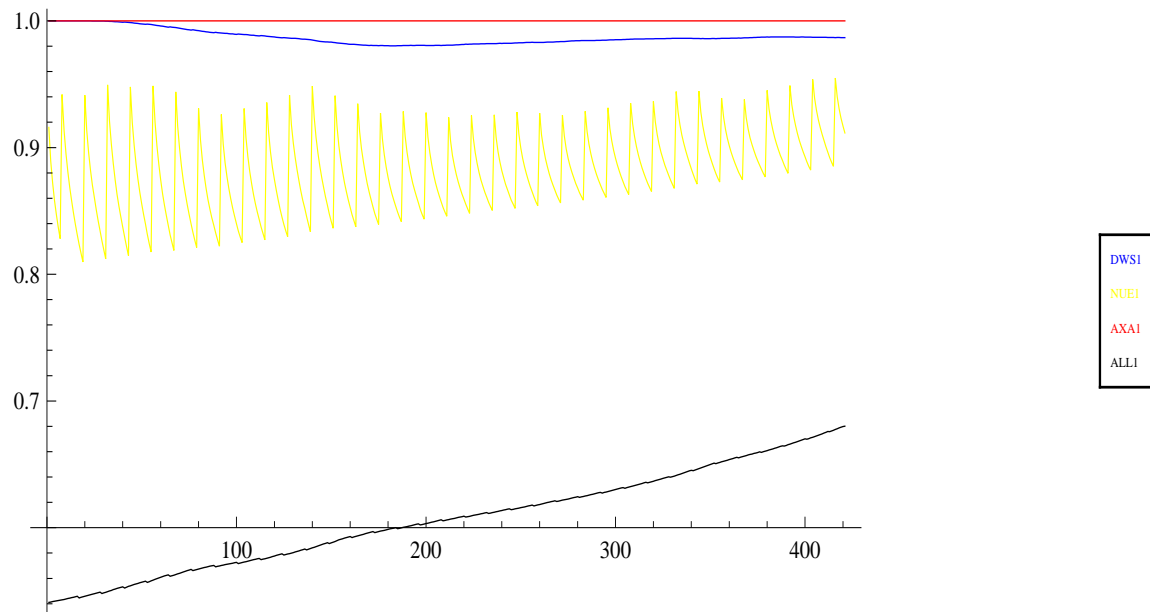


Abbildung 13: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Bullishes Szenario

4.7 Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	148.489	126.903	95%
NUE	136.388	118.475	84%
AXA	137.057	117.916	100%
ALL	105.659	95.425	52%

Tabelle 8: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Geteiltes Szenario: Jahre 0-20 pessimistisch, Jahre 20-35 optimistisch

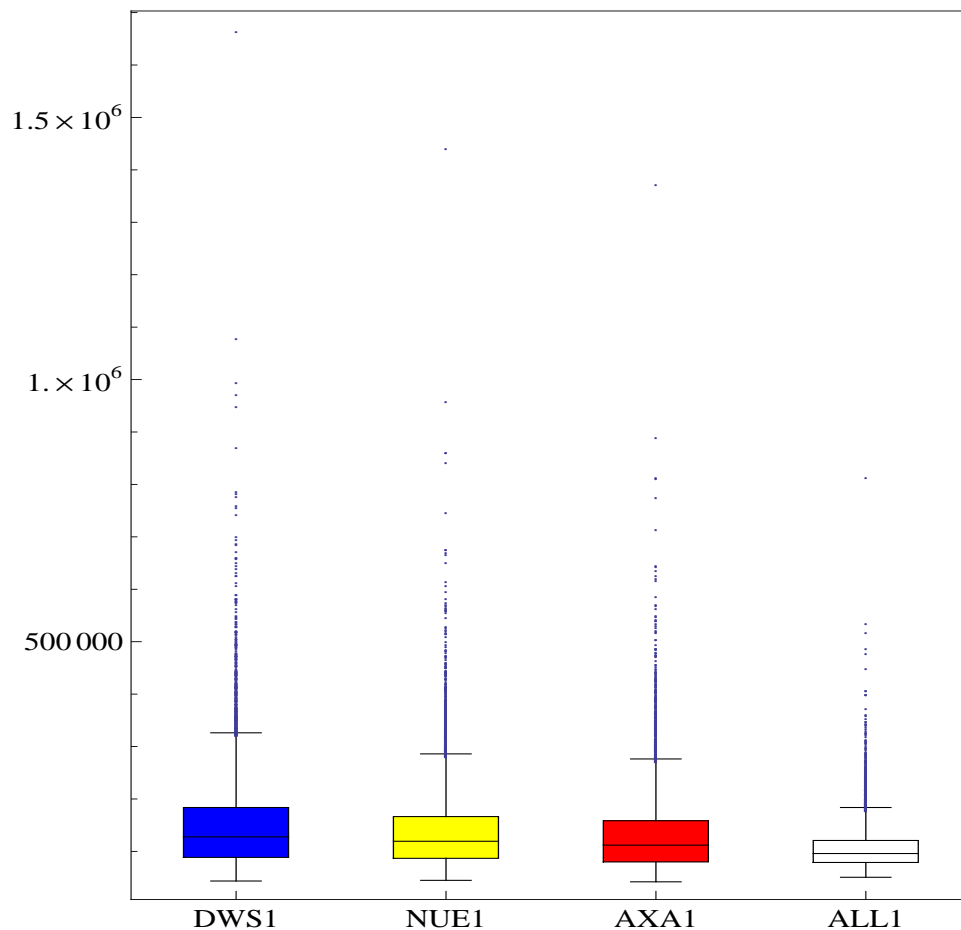


Abbildung 14: Box Plot Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch

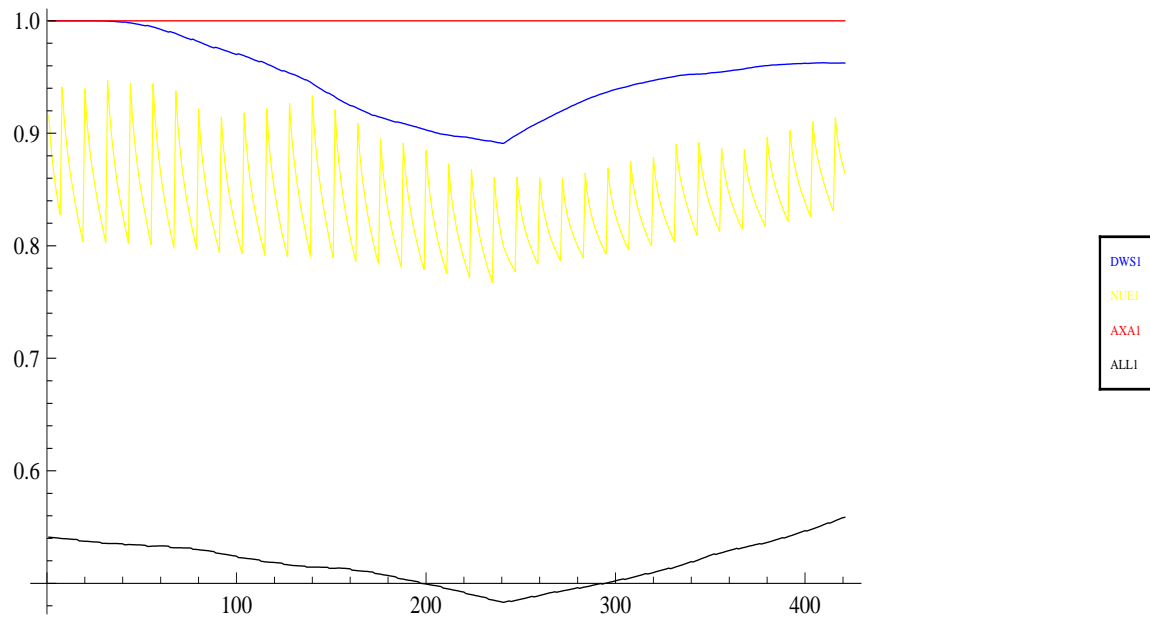


Abbildung 15: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Geteiltes Szenario: erst pessimistisch, dann optimistisch

4.8 Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch

Produkt	Mittelwert	Median	Aktienquote
DWS	129.151	109.344	98%
NUE	119.976	103.169	87%
AXA	116.177	98.684	100%
ALL	99.001	89.289	56%

Tabelle 9: Bei Renteneintritt zur Verfügung stehendes Kapital, Geteiltes Szenario: Jahre 0-20 optimistisch, Jahre 20-35 pessimistisch

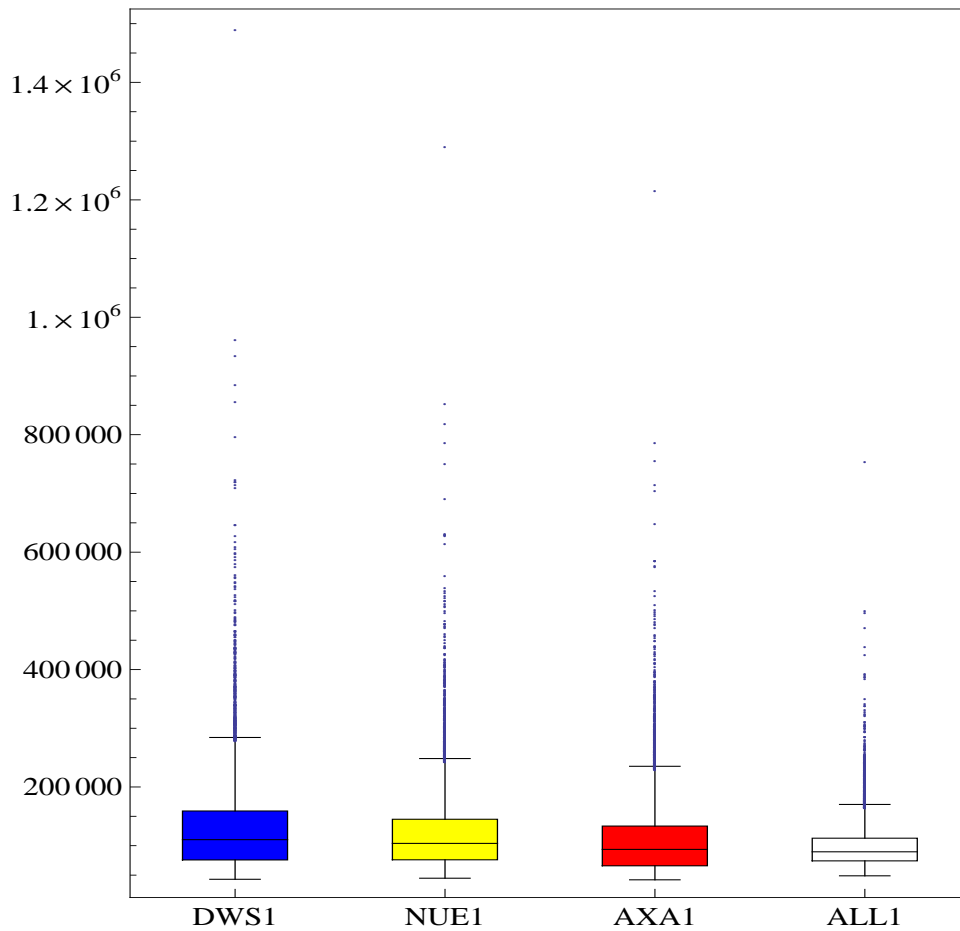


Abbildung 16: Box Plot Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch

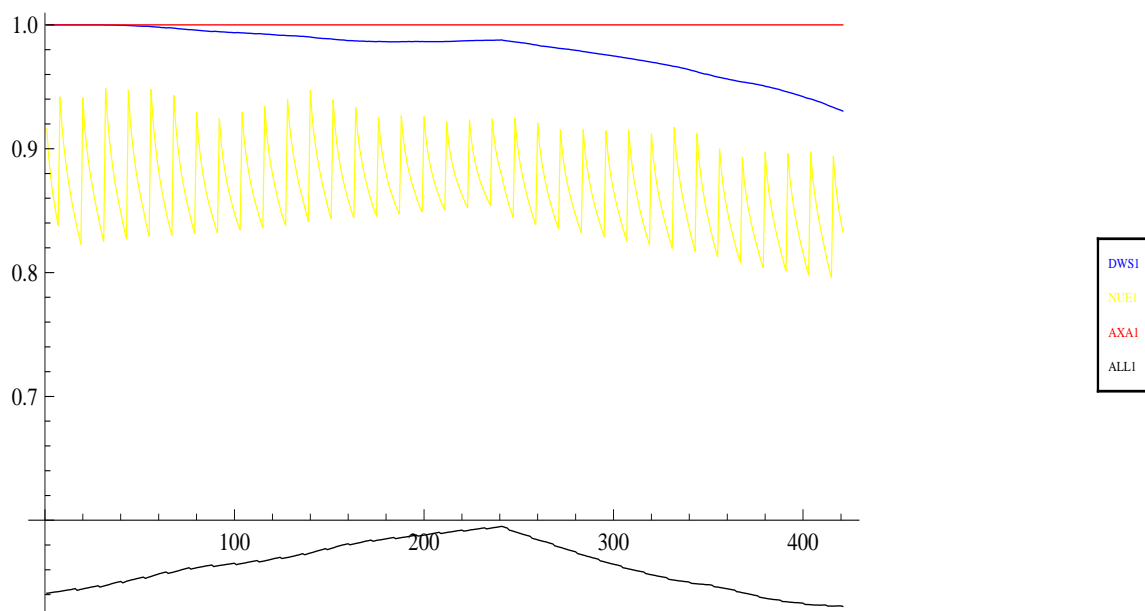


Abbildung 17: Verlauf der durchschnittlichen Aktienquoten bei 100.000 Simulationen, Geteiltes Szenario: erst optimistisch, dann pessimistisch

5 Zusammenfassung

- Die CPPI-Anlagestrategie der DWS schneidet *in fast allen betrachteten Marktszenarien* mit Abstand am Besten ab. Durch den langen Investitionshorizont kann das CPPI-Verfahren auch Crashes verkraften. Der Ansatz besticht daneben auch durch seine enorme Transparenz und die für jeden Kunden individuell erfolgende Abwicklung.
- Der Dynamic Hedging Ansatz der AXA kann allenfalls als befriedigende Strategie gewertet werden. Die einmalig berechneten Garantiekosten ermöglichen zwar immer eine hundertprozentige Aktienquote. Diese Aktienquote führt aber bei pessimistischen Szenarien nur zu einem mäßigen Anlageerfolg. Bei optimistischen Szenarien dagegen werden dem an sich gut wachsenden Fondsvermögen auch mehr Garantiegebühren entnommen.
- Die Mischstrategie der Nürnberger leidet an der Verwendung von zu vielen Produkten und vielen Umschichtungen.
- Der klassische Ansatz der Allianz führt zu einem deutlich geringeren Erfolg außer im Crash-Szenario. Dies ist so zu interpretieren, dass bei anhaltender Rezession die Aktienquote beim CPPI-Verfahren recht bald bei null liegt, viel mit Aktien verloren wurde und nur noch der Floor die garantierte Auszahlung rettet. Auch die AXA wird überholt, weil die einhundertprozentige Aktienquote im Crash-Szenario für den Anleger ungünstig ist. Schwarzseher sind also bei einem soliden klassischen Versicherungsunternehmen gut aufgehoben.

- Die höchsten Aktienquoten finden wir bei AXA und der DWS, dicht gefolgt von der Nürnberger.

Literatur

- [1] BECKER, C. und WYSTUP, U. (2007). *Was kostet die Garantie? Ein statistischer Vergleich der Rendite von langfristigen Anlagen*. Auftragsstudie von Franklin Templeton Investment Services GmbH.
- [2] BLACK, F. and SCHOLES, M. (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* **81**.
- [3] BRÄUNING, T. (2004). *Dynamic Portfolio Insurance — A Flexible Approach to Capital Protection*. Vortrag vom 06.10.2004 an der [Frankfurt School of Finance & Management](#), Frankfurt/Main.
- [4] HANSSMANN, W., Vorstand AXA. Interview durch Experten Presse News am 3.4.2007 mit der Aussage von Garantiekosten von 75 bis 105 Basispunkten des Nettovermögens: <http://www.experten.de/NET/epn/91353772-b776-495f-bc13-85894594a947.epnnews>
- [5] KOU, S.G. (2002). A Jump-Diffusion-Modell for option pricing. *Management Science*, Vol 48, No 8.
- [6] MARTELLINI, L., SIMSEK, K. und GOLTZ, F. (2005). *Structured Forms of Investment – Strategies in Institutional Investors’ Portfolios*. Benefits of Dynamic Asset Allocation Through Buy-and-Hold Investment in Derivatives. An Edhec Risk and Asset Management Research Centre Publication, Nizza.
- [7] MERTON, R.C. (1976). Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics* **3**.
- [8] ORTMANN, M. (2007). *Vergleichende Evaluation Riesterprodukte: Gutachterliche Stellungnahme zu ausgewählten Riesterprodukten*. [Institut für Transparenz in der Altersvorsorge](#).
- [9] WEBER, A. und WYSTUP, U. (2008). *Riesterrente im Vergleich – Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen*. Auftragsstudie der DWS Investment GmbH.
- [10] WYSTUP, U. (2007). *Asset Management*. Vorlesungsskript an der [Frankfurt School of Finance & Management](#), Frankfurt/Main.