

# Stochastische Volatilität

## Motivation und Anwendung auf die Bewertung exotischer Optionen



Uwe Wystup

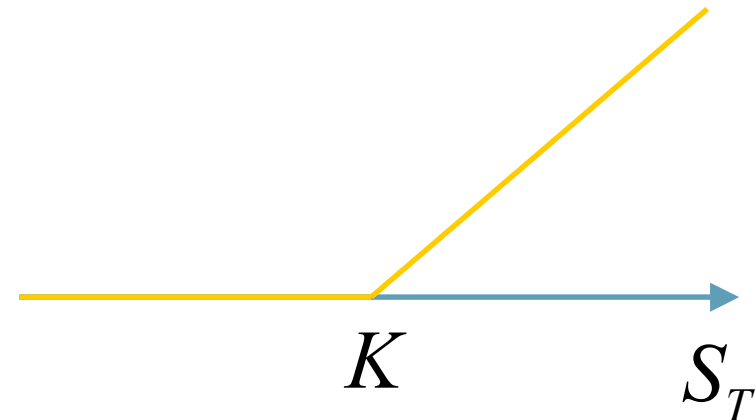
Frankfurt am Main, 14 Januar 2004

# Devisenoptionen

- Vanilla
- exotische Optionen



- Vanillaoption
- Recht (aber nicht die Pflicht)
- zur Zeit T
- einen festen Betrag der Währung A
- in einen festen Betrag der Währung B
- umzutauschen
- $K = |A|/|B|$  = Ausübungspreis („Strike“)



Auszahlungsprofil Call

$$\max(0, S_T - K)$$

# Optionsbewertung

## Kontrakt

- T, K, ...

## Markt

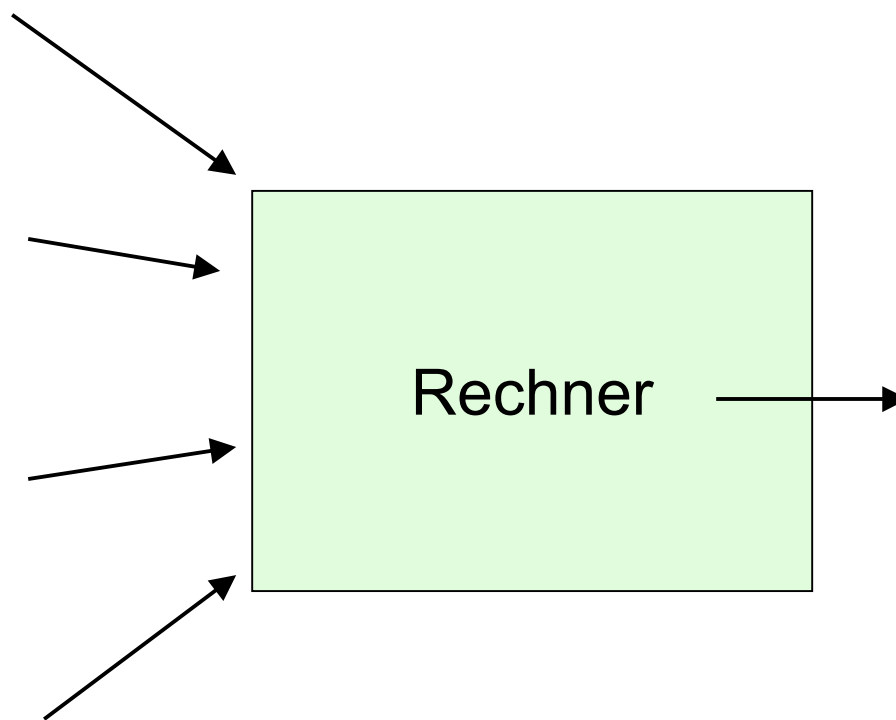
- Spot
- Zinsen
- Vols

## Modell

- Black-Scholes
- Tompkins
- ...

## Methode

- Formel
- Monte Carlo
- DGL

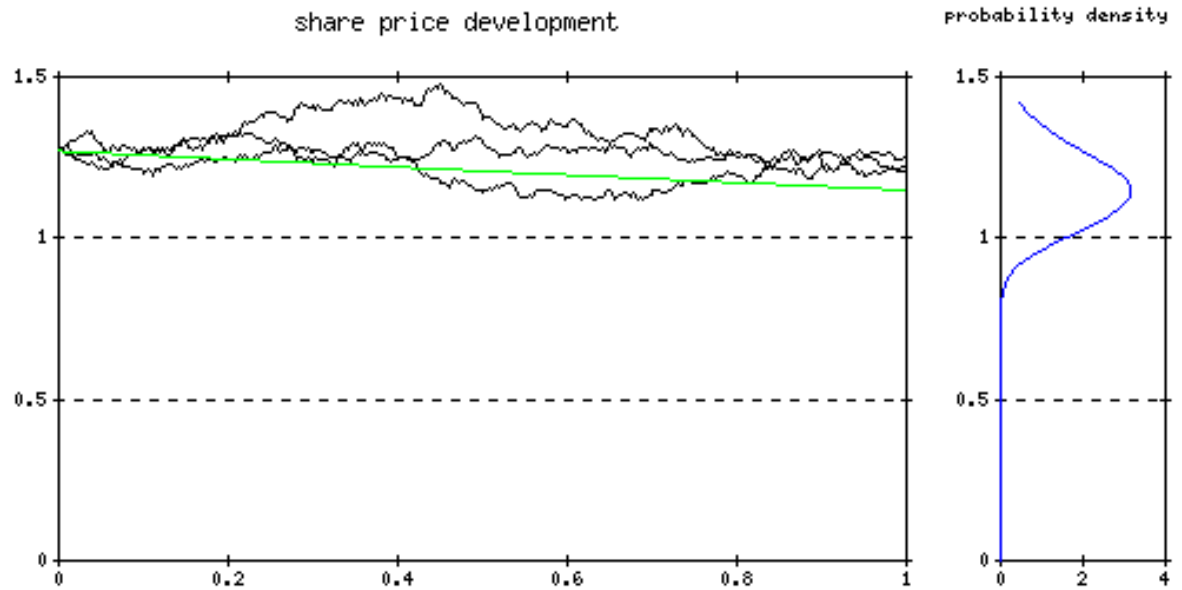


- Wert
- Geld/Brief Spanne
- Greeks
- Konfidenzintervalle

# Black-Scholes Merton Modell

- $\sigma$  Volatilität
- $r_d$  domestic interest rate
- $r_f$  foreign interest rate
- $W_t^f$  Brownsche Bewegung
- $S_t$  Wechselkurs zur Zeit t

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$



[http://www.mathfinance.de/TinoKluge/tools/sharesim/black\\_scholes.php](http://www.mathfinance.de/TinoKluge/tools/sharesim/black_scholes.php)

- Call value  $C(t, S)$
- Erfüllt die Differentialgleichung

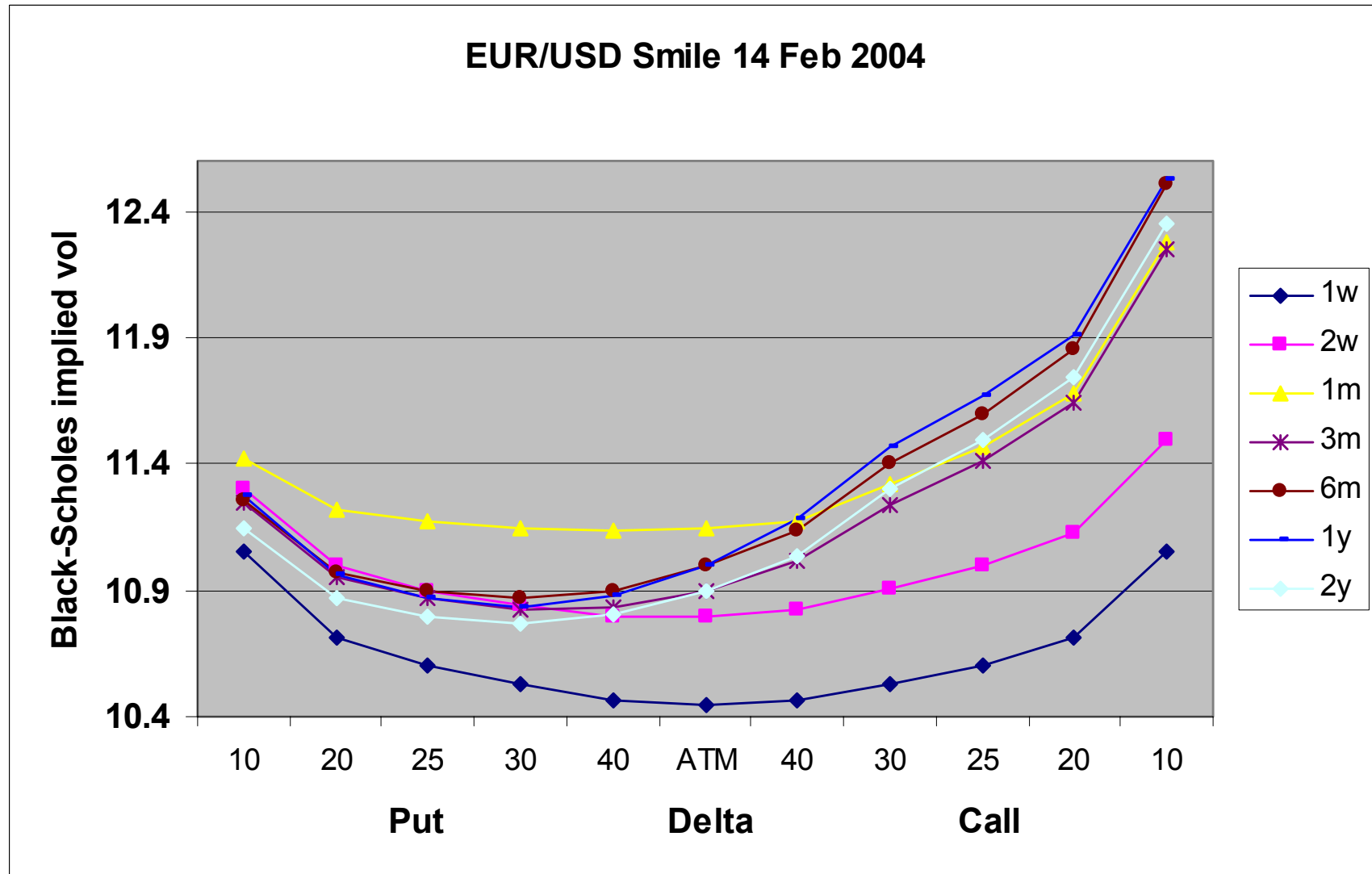
$$C_t + (r_d - r_f)SC_S + \frac{1}{2}S^2\sigma^2C_{SS} - r_dC = 0$$

$$C(T, S) = \max(0, S - K)$$

- (Feynman-Kac) Lösung lässt sich schreiben als

$$C(t, S) = e^{-r_d(T-t)} E[\max(0, S_T - K) | S_t = S]$$

# Smile Effekt im Black-Scholes/Merton Modell



# Abhilfen

---

- Zeitabhängige Volatilität
- Volatilität als Funktion von Zeit und Spot
- Stochastische Volatilität
- Stochastische Zinsen
- Modelle mit Sprüngen
- Stochastische Volatilität + Sprünge
- GARCH Modelle
- Growth Optimal Portfolio als Numeraire
- ...
- Unconditional Disturbances

# Stochastische Volatilität

---

- Hull/White (1987)
- Stein/Stein (1991)
- Heston (1993)
- Schöbel/Zhu (1998)
- Hagan (2000)
- ...



## Heston Modell

- $\sigma$  Instantane Volatilität
- $\kappa$  Mean reversion speed
- $\theta$  Langfristige instantane Varianz
- $\zeta$  Volatilität der Volatilität
- $\rho$  Korrelation

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t dW_t^1$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \zeta \sqrt{V_t} dW_t^2$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$$

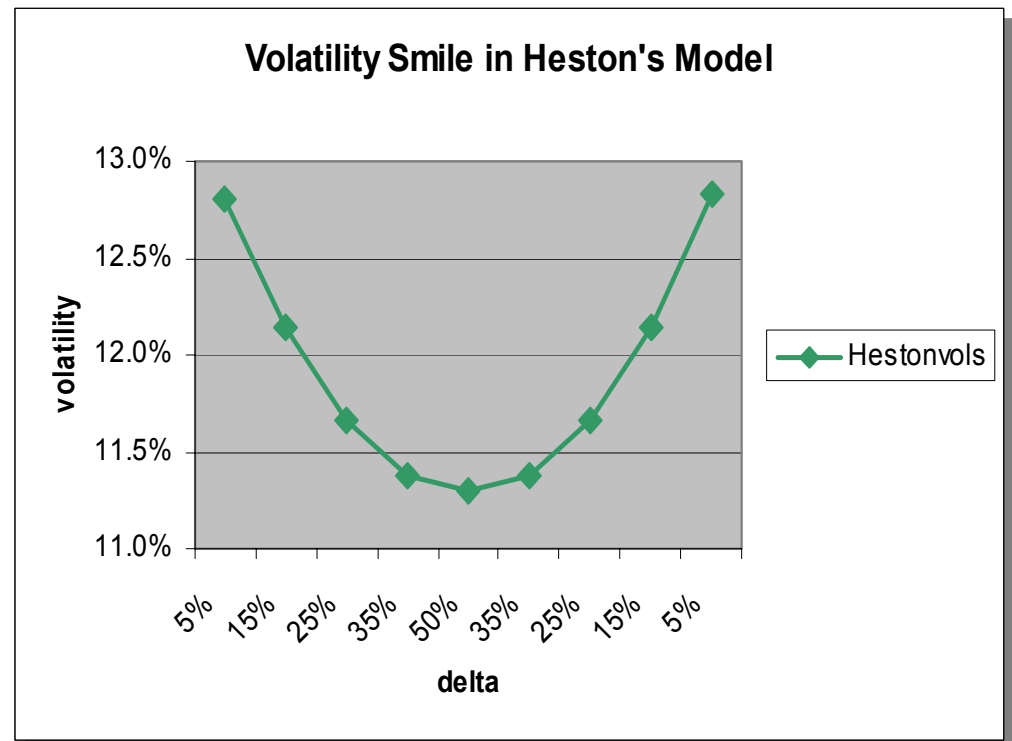
## Heston Modell

- Call value  $H(t, S, \sigma)$
- Erfüllt die Differentialgleichung

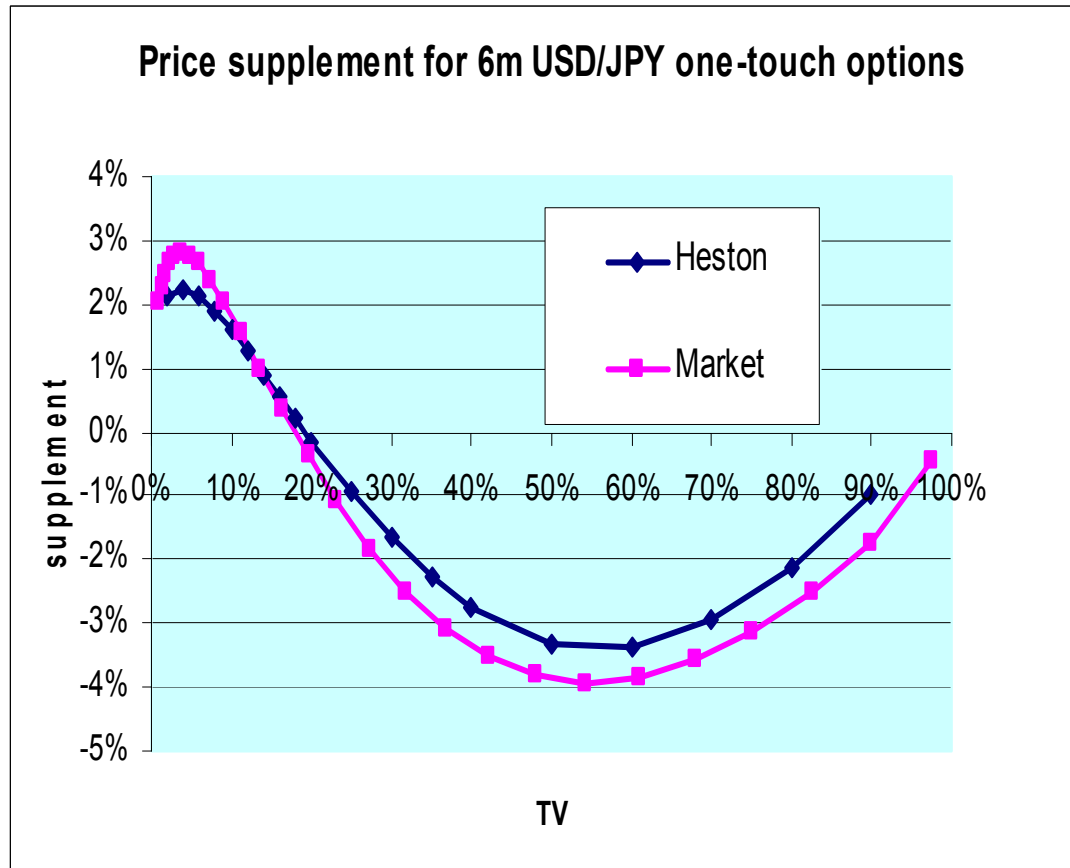
$$H_t + (r_d - r_f)SH_S + \frac{1}{2}S^2\sigma^2H_{SS} - r_dH$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma^2VH_{VV} + \rho S\sigma VH_{VS} + [\kappa(\theta - V) - \lambda V]H_V = 0$$

## Was spricht für Hestons Modell ?

- ▶ Implementierbarkeit
- ▶ Abdeckung der Produktpalette
- ▶ Erklärbarkeit von Marktpreisen



# Heston: Anwendung auf exotische Optionen



## Links

---

- <http://www.mathfinance.de> OptionPricer, Heston Vanilla Code
- <http://www.mathfinance.de/TinoKluge/> Share Simulator
- <http://www.superderivatives.com> FX vols und exotics
- [http://www.mathfinance.de/wystup/papers/OT\\_derivativesweek.pdf](http://www.mathfinance.de/wystup/papers/OT_derivativesweek.pdf)  
Market Price of One-touch options in FX
- <http://ise.wiwi.hu-berlin.de/~mdstat/scripts/stf/html/> Statistical Tools in Finance and Insurance
- <http://www.mathfinance.de/FXRiskBook/> Foreign Exchange Risk
- <http://kluge.in-chemnitz.de//download/hfb/> Animationen
- <http://www.mathfinance.de/wystup/papers.html> Diese Präsentation

**Uwe Wystup**

Hochschule für Bankwirtschaft

Sonnemannstraße 9-11

D-60314 Frankfurt am Main

T +49-69 154008-719

F +49-69 154008-728

E-Mail: [wystup@hfb.de](mailto:wystup@hfb.de)

